Eigenschaften von Dreiecken, deren Winkel in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen *

Leonhard Euler

Unter allen geometrischen Wahrheiten sind hauptsächlich die der Aufmerksamkeit würdig, deren Beweis dermaßen im Verborgenen liegt, dass es scheint, dass der analytischen Untersuchung kaum ein Platz gelassen zu werden scheint. Denn diese Wahrheiten sind von solcher Natur, dass sie mit einer analytischen Formel leicht erfasst werden können; es wäre völlig überflüssig, den Geist mit deren Aufklärung zu zermürben: Zu dieser Art sind die meisten Eigenschaften von Kegelschnitten zu rechnen, von welchen meistens eine riesige Menge in einer einzigen analytischen Formel eingeschlossen werden kann. Aber die elementaren Eigenschaften der Figuren sind mit umso größerer Sorgfalt zu behandeln, weil nicht die Analysis zu ihnen führt, sondern ihnen vielmehr etwas Höheres übergestellt werden muss. Ich weiß nicht, ob die Eigenschaften von Dreiecken, welche ich hier zu entwickeln beschlossen habe, zu den elementaren zu zählen sind oder nicht. Denn wenn wir deren geometrische Beweise betrachten, werden sie dermaßen verwickelt, dass sie in den Elementen kaum Platz finden können; aber dann, was hier besonders zu bemerken ist, scheint nicht einmal die Analysis geeignet, um deren Gültigkeit zu bestätigen; deswegen zweifle ich nicht, diese Betrachtung der Aufmerksamkeit der Geometer anzuvertrauen.
Die Gelegenheit diese Dinge zu untersuchen hat mir aber die quasi erste elementare Eigenschaft von Dreiecken gegeben, nach welcher wir wissen,

*Originaltitel: "Proprietates triangulorum, quorum anguli certam inter se tenent rationem", zuerst publiziert in: *Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae, Band 11* (1767, verfasst 1763): pp. 67–102, Nachdruck in: Opera Omnia: Serie 1, Band 20, pp. 109 – 138, Eneström-Nummer E324, übersetzt von: Alexander Aycock für den "Euler-Kreis Mainz".

wenn zwei Winkel einander gleich waren, dass auch die zwei Seiten, natürlich die gegenüberliegenden, einander gleich sein werden. So wie also in diesem Fall aus einer gegebenen Bedingung an die Winkel eine bestimmte Relation der Seiten folgt, so lässt sich allgemein bestätigen, dass, sooft in einem Dreieck eine bestimmte Relation zwischen zwei Winkeln gegeben ist, daher notwendig auch eine gewisse Relation zwischen den Seiten bestimmt wird. Daraus ergibt sich diese Frage: *Wenn in einem Dreieck, dessen Winkel α, β, γ seien, die ihnen gegenüberliegenden Seiten mit den Buchstaben a, b, c bezeichnet werden und diese Bedingung gegeben ist, das $\alpha : \beta = m : n$ ist, die daraus entspringende Relation zwischen den Seiten a, b, c ausfindig zu machen.* Dass dieses Problem sofort, wenn das gegebene Verhältnis $m : n$ auch nur geringfügig kompliziert angenommen wird, analytisch behandelt in unangenehmste Rechnungen hineinführt, wird jedem, der den entsprechenden Versuch unternimmt, klar werden: Wenn wir aber vom einfachsten Fall aus, in dem $\beta = \alpha$ und $b - a = 0$ ist, beginnend geordnet zu den komplexeren voranschreiten, wird sich schließlich ein außerordentliches Fortschreitungsgesetz beobachten lassen, welches umso bemerkenswerter scheint, weil es allein durch Induktion gefunden ist und kaum einen Beweis zuzulassen scheint.

PROBLEM 1

§1 Wenn im Dreieck ABC (Fig. 1)[1] ang. $B = 2\,$ang. A war, die daraus zu entspringende Relation zwischen seinen Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ ausfindig zu machen.

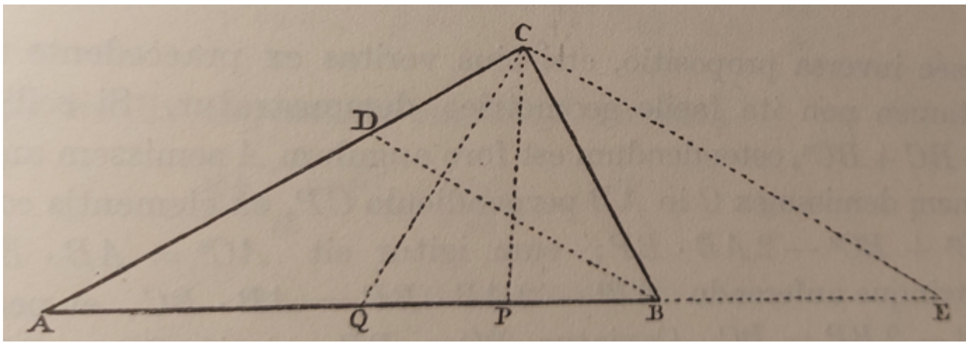

Fig. 1

[1] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

Lösung

Nachdem der Winkel B durch die Gerade BD in zwei Teile geteilt worden ist, wird das Dreieck ADB gleichschenklig sein und das Dreieck BCD dem ganzen Dreieck ACB gleich sein, woher

$$AC : BC = AB : BD = BC : CD$$

oder

$$b : a = c : \frac{ac}{b} = a : \frac{aa}{b}$$

wird. Also ist $BD = \frac{ac}{b}$ und $CD = \frac{aa}{b}$; daher ist $AD = b - \frac{aa}{b}$. Aber wegen $BD = AD$ werden wir $ac = bb - aa$ haben, in welcher Gleichung also die gesuchte Relation zwischen den Seiten des Dreiecks enthalten ist, welche

$$\text{entweder} \quad (AC + BC)(AC - BC) = AB \cdot BC \quad \text{oder} \quad AC^2 = BC(AB + BC)$$

ist.

Korollar 1

§2 Die letzte Gleichung gibt einen leichten Beweis der gefundenen Formel an die Hand; nachdem nämlich die Seite AB bis hin zu E verlängert worden ist, dass $BE = BC$ ist, wird der Winkel E die Hälfte von ABC sein, und daher A gleich sein, woher die gleichschenkligen Dreiecke ACE und CBE ähnlich sein werden; daher

$$AE : AC = CE : BC \quad \text{oder} \quad AB + BC : AC = AC : BC.$$

Korollar 2

§3 Also umgekehrt, sooft zwischen den Seiten des Dreiecks ABC diese Relation entdeckt wird, dass $AC^2 = BC \cdot (AB + BC)$ oder $bb = aa + ac$ ist, sooft muss gefolgert werden, dass der Winkel ABC das Doppelte des Winkels BAC ist.

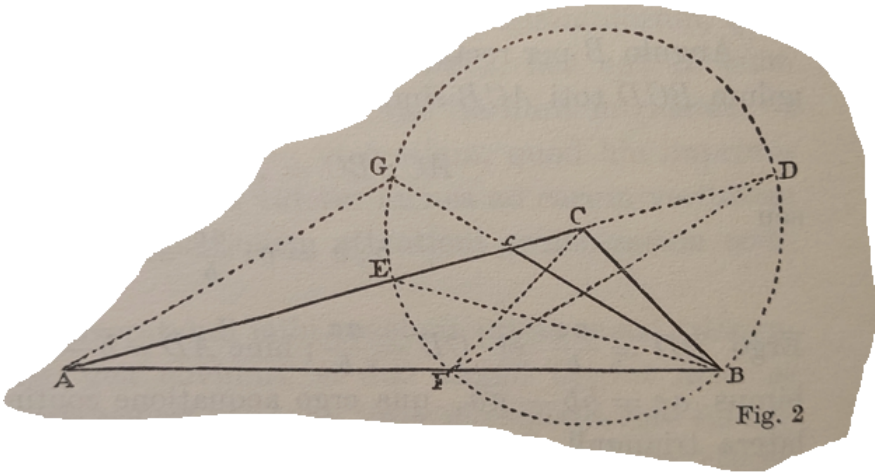

Fig. 2

Scholion

§4 Die umgekehrte Proposition, auch wenn ihre Gültigkeit aus der vorhergehenden notwendig folgt, wird dennoch nicht so leicht geometrisch bewiesen. Wenn nämlich $AC^2 = AB \cdot BC + BC^2$ war, ist zu zeigen, dass der Winkel A die Hälfte des Winkels ABC sein wird. Nachdem zu diesem Ziel von C aus zu AB das Lot CP gefällt worden ist, ist es aus den Elementen bekannt, dass $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BP$ ist; weil also $AC^2 = AB \cdot BC + BC^2$ ist, wird durch Subtrahieren von $AB^2 - 2AB \cdot BP = AB \cdot BC$ auf beiden Seiten und Dividieren durch AB schließlich $AB - 2BP = BC$ sein. Man nehme $PQ = BP$, dass $CQ = BC$ ist, und es wird $AQ = BC$ oder $AQ = CQ$ sein, woher der Winkel BQC, welchem ABC gleich ist, das Doppelte des Winkels A ist, welches der Beweis der umgekehrten Propostion ist.

Problem 2

Wenn im Dreieck ABC (Fig. 2)[2] der Winkel ABC das Dreifache des Winkels A war, die Relation, die sich daraus auf die Seiten des Dreiecks $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ ergießt, zu bestimmten.

[2] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

LÖSUNG

Vom Winkel B aus zeichne man die Gerade Bc so, dass der Winkel CBc dem Winkel A gleich ist, und daher der Winkel ABc sein Doppeltes ist, und sich so das Dreieck ABc auf den Fall des vorhergehenden Problems erstreckt. Aber das Dreieck BCc ist dem Dreieck ACB ähnlich, woher

$$AC : BC = AB : Bc = BC : Cc$$
$$b : a = c : \frac{ac}{b} = a : \frac{aa}{b}$$

wird. Also ist $Bc = \frac{ac}{b}$ und $Cc = \frac{aa}{b}$ und daher $Ac = \frac{bb-aa}{b}$. Nun setze man im Dreieck ABc analog die Seiten

$$AB = \gamma, \quad Ac = \beta \quad \text{und} \quad Bc = \alpha$$

und aus dem vorhergehenden Problem hat man für dieses Dreieck diese Eigenschaft:

$$\beta\beta - \alpha\alpha - \alpha\gamma = 0.$$

Aus dem gerade Gefunden wissen wir aber, dass

$$\gamma = c, \quad \beta = \frac{bb - aa}{b} \quad \text{und} \quad \alpha = \frac{ac}{b}$$

ist, welche Werte in jener Gleichung eingesetzt liefern:

$$\frac{(bb-aa)^2}{bb} - \frac{aacc}{bb} - \frac{acc}{b} = 0 \quad \text{oder}$$
$$(bb-aa)^2 - acc(a+b) = 0,$$

welche Gleichung durch $a + b$ geteilt in diese übergeht:

$$(bb-aa)(b-a) - acc = 0,$$

in welcher die Natur der vorgelegten Aufgabe enthalten ist, dass der Winkel ABC das Dreifache des Winkels A ist.

Korollar 1

§6 Wannimmer also im Dreieck ABC der Winkel bei B das Dreifache des Winkels A ist, dann ist zwischen seinen Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ diese Relation gegeben ist, dass

$$(bb - aa)(b - a) - acc = 0 \quad \text{oder} \quad (b - a)^2(b + a) - acc = 0$$

ist, welche entwickelt

$$b^3 - abb - aab + a^3 - acc = 0$$

wird.

Korollar 2

§7 Um diese Eigenschaft geometrisch zu formulieren, beschreibe man um den Mittelpunkt C mit dem Radius $CB = a$ einen Kreis, der die verlängerte Seite AC in D und E scheidet, die Seite AB hingegen in F. Weil nun $AD = b + a$ und $AE = b - a$ ist, wird $AD \cdot AE^2 = BC \cdot AB^2$ sein. Aus den Elementen ist aber $AE \cdot AD = AF \cdot AB$, woher $AE \cdot AF = BC \cdot AB$ und daher $AE : CE = AB : AF$ wird, welches Verhältnis geometrisch bewiesen werden muss.

Korollar 3

§8 Weil in derselben Figur der Winkel $CFB = ABC = 3A$ ist, wird der Winkel $ACF = 2A$ und $BCD = ABC + A = 4A$ sein, woher der Bogen BD das Doppelte des Bogens EF ist. Nachdem also die Gerade BE gezeichnet worden ist, wird der Winkel $EBF = \frac{1}{2}ECF = A$ und daher $BE = AE$ sein. Nachdem in gleicher Weise die Gerade DF gezeichnet worden ist, wird der Winkel ADF auch dem Winkel A gleich, woraus $DF = AF$ ist.

Korollar 4

§9 Daher geht die zuvor gefundene Analogie $AE : CE = AB : AF$ in diese

$$BE : CE = AB : DF = DF + BF : DF$$

oder

$$BE \cdot DF = CE \cdot AB = BC(BF + DF)$$

übergeht. Diese Eigenschaft wird geometrisch so gezeigt: Nachdem der Bogen $EG = EF$ genommen und AG und BG gezeichnet worden ist, wird $AG = AF$ und $BG = DF$ sein, wegen des Bogens $FG = BD$, und daher $FGB = BDF$ und $AG = BG$, wegen $AF = DF$. Nun sind aber die beiden gleichschenkligen Dreiecke AGB und BCE ähnlich, weil der Winkel $CEB = 2A =$ dem Winkel BAG ist; daraus folgt: $AB : AG = BE = CE$ oder $AB : AF = AE : BC$ oder $BC \cdot AB = AE \cdot AF$, welches die oben gefundene Eigenschaft ist.

SCHOLION

§10 Die gefundene Eigenschaft wird gefälliger auf diese Weise bewiesen werden: Nachdem um den Mittelpunkt C mit dem Radius CB ein Kreis beschrieben worden ist, welche die Seite AC und D und E, die Seite AB hingegen in F schneidet, und dann BE und CF gezeichnet worden sind, wird wegen des Winkels $CFB = CBF = 3A$ der Winkel $CEB = 2A = CBE$ sein, und weil der Winkel $ABE = A$ ist, wird $BE = AE$ sein. Dann, nachdem der Bogen $EG = EF$ genommen worden ist und AG und BG gezeichnet worden sind, wird natürlich $AG = AF$ sein, und so $BAG = 2A$ wie $ABG = 2A$, und daher $BG = AG = AF$. Also wird das Dreieck AGB dem Dreieck BEC sein, woher $AB : AG = BE : BC$ wird, und weil $AG = AF$ und $BE = AE$ ist, wird $AB : AF = AE : BC$ sein. Aus den Elementen ist aber $AF : AE = AD : AB$, woher durch Zusammenbringen

$$AB : AE = AE \cdot AD : BC \cdot AB \quad \text{oder} \quad AE^2 \cdot AD = BC \cdot AB^2$$

wird, welche Gleichung

$$(AC - BC)^2(AC + BC) = BC \cdot AB^2$$

gibt, welches die oben gefundene und nun geometrisch bewiesene Eigenschaften ist.

PROBLEM 3

§11 Wenn im Dreieck ABC (Fig. 3)[3] der Winkel ABC das Vierfache des Winkels A war, die durch jene Bedingung bestimmte Relation zwischen seinen Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ ausfindig zu machen.

[3]Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

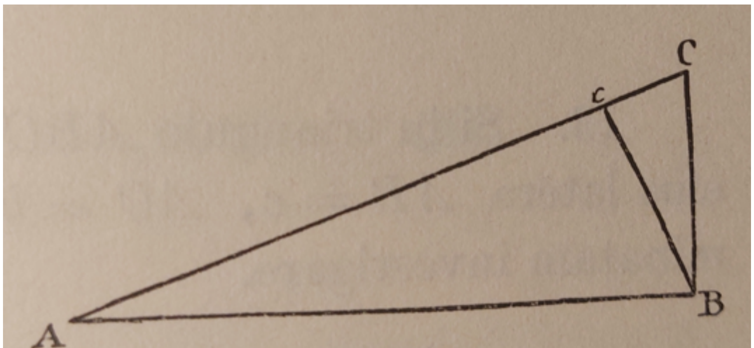

Fig. 3

LÖSUNG

Vom vierfachen Winkel B aus zeichne man die Gerade Bc, die den Winkel $CBc = A$ abtrennt, dass im Dreieck ABc der Winkel bei B das Dreifache des Winkels A ist und diese Dreieck sich auf den Fall des vorhergehenden Problems erstreckt. Aber das Dreieck BCc wird dem Dreieck ACB ähnlich sein, woher man wie zuvor, berechnet:

$$Bc = \frac{ac}{b}, \quad Cc = \frac{aa}{b} \quad \text{und daher} \quad Ac = \frac{bb - aa}{b}$$

Man setze nun für das Dreieck ABc die Seiten $AB = \gamma$, $Ac = \beta$ und $Bc = \alpha$, und zwischen diesen Seiten wird vermöge des vorhergehenden Problems diese Relation bestehen, dass gilt:

$$\beta^3 - \alpha\beta\beta - \alpha\alpha\beta - \alpha(\gamma\gamma - \alpha\alpha) = 0.$$

Hier setze man anstelle von α, β, γ jene Werte $\frac{ac}{b}$, $\frac{bb-aa}{b}$ und c ein, oder um die Brüche zu beseitigen, weil dort die Anzahl an Dimensionen überall dasselbe ist, schreibe man diese Werte mit b multipliziert, als wäre $\alpha = ac$, $\beta = bb - aa$ und $\gamma = bc$ wäre; und so wird diese Gleichung entspringen:

$$(bb - aa)^3 - ac(bb - aa)^2 - aacc(bb - aa) - ac^3(bb - aa) = 0;$$

weil diese natürlich den Teiler $bb - aa$ hat, wird die Gleichung, die die gesuchte Relation ausdrückt, sein:

$$(bb - aa)^2 - ac(bb - aa) - aacc - ac^3 = 0.$$

Korollar

§12 Diese Gleichung geht entwickelt und nach Potenzen von b geordnet in diese Form über:

$$b^4 - a(2a+c)bb - a(cc-aa)(a+c) = 0,$$

welche im Folgenden zu gebrauchen sein wird.

Problem 4

§13 Wenn im Dreieck ABC der Winkel ABC das Fünffache des Winkels A war, die von dieser Bedingung bestimmte Relation zwischen seinen Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ ausfindig zu machen.

Lösung

Nachdem wiederum die Gerade Bc gezeichnet worden ist, die den A gleichen Winkel CBc abtrennt, dass das Dreieck BCc dem ganzen Dreieck ACB ähnlich wird, das Dreieck ABc hingegen zum vorhergehenden Fall zu rechnen ist, wird, wenn für dieses die Seiten $AB = \gamma$, $Ac = \beta$ und $Bc = \alpha$ gesetzt werden, wie wir zuvor gefunden haben, sein:

$$\beta^4 - \alpha(2\alpha+\gamma)\beta\beta - \alpha(\gamma\gamma - \alpha\alpha)(\alpha+\gamma) = 0.$$

Aber hier, wie wir zuvor gezeigt haben, müssen diese Substitutionen geschehen: $\alpha = ac$, $\beta = bb - aa$ und $\gamma = bc$, woher diese Gleichung entspringt:

$$(bb-aa)^4 - acc(2a+b)(bb-aa)^2 - ac^4(bb-aa)(a+b) = 0$$

entspringt, welche durch $(bb-aa)(b+a)$ geteilt diese Form annimmt:

$$(bb-aa)^2(b-a) - acc(2a+b)(b-a) - ac^4 = 0$$

und nach Ausmultiplizieren geht

$$b^5 - ab^4 - 2aab^3 - a(cc-2aa)bb - aa(cc-aa)b - a(cc-aa)^2 = 0$$

hervor.

PROBLEM 5

§14 Wenn im Dreieck ABC der Winkel ABC das Sechsfache des Winkels A war, die von dieser Bedingung bestimmte Relation zwischen seinen Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Aus den obigen Ausführungen ist schon hinreichend ersichtlich, dass die Relation gefunden wird, wenn wir in der, die wir gerade erlangt haben, anstelle der Buchstaben a, b, c diese Formeln schreiben: ac, $bb - aa$ und bc; und so geht hervor:

$$(bb-aa)^5 - ac(bb-aa)^4 - 2aacc(bb-aa)^3 - ac^3(bb-2aa)(bb-aa)^2$$
$$-aac^4(bb-aa)^2 - ac^5(bb-aa)^2 = 0,$$

welche Gleichung durch $(bb - aa)^2$ geteilt diese Form annimmt:

$$(bb-aa)^3 - ac(bb-aa)^2 - 2aacc(bb-aa) - ac^3(bb-2aa) - aac^4 - ac^5 = 0;$$

aber nach Ausmultiplizieren hat man

$$b^6 - a(3a+c)b^4 + a(3a^3 + 2aac - 2acc - c^3)bb$$
$$-a(cc-aa)^2(c+a) = 0$$

oder

$$b^6 - a(c+3a)b^4 - a(c+a)(cc+ac-3aa)bb - a(cc-aa)^2(c+a) = 0.$$

KOROLLAR 1

§15 Wenn hier in gleicher Weise die Substitution $a = ac$, $b = bb - aa$ und $c = bc$ geschieht, entspringt die Gleichung für das Dreieck ABC, in welchem der Winkel bei B das Siebenfache des Winkels A ist, welche also sein wird:

$$(bb-aa)^6 - acc(b+3a)(bb-aa)^4 - ac^4(b+a)(bb+ab-3aa)(bb-aa)^2$$

$$-ac^6(bb-aa)^2(b+a)=0,$$

welche schon eine Teilung durch $(bb-aa)^2(b+a)$ zulässt und

$$(bb-aa)^3(b-a)-acc(b+3a)(bb-aa)(b-a)-ac^4(bb+ab-3aa)$$
$$-ac^6=0$$

oder

$$b^7-ab^6-3aab^5-a(cc-3aa)b^4-aa(2cc-3aa)b^3$$
$$-a(cc-aa)(cc-3aa)bb-aa(cc-aa)^2b-a(cc-aa)^3=0$$

gibt.

KOROLLAR 2

§16 Mithilfe derselben Substitution wird daher eine Gleichung für das Dreieck ABC entspringen, in welchem der Winkel bei B das Achtfache des Winkels A ist, nämlich:

$$(bb-aa)^7-ac(bb-aa)^6-3aacc(bb-aa)^5-ac^3(bb-3aa)(bb-aa)^4$$
$$-aac^4(2bb-3aa)(bb-aa)^3-ac^5(bb-aa)(bb-3aa)(bb-aa)^2$$
$$-aac^6(bb-aa)^2(bb-aa)-ac^7(bb-aa)^3=0,$$

welche Gleichung durch $(bb-aa)^3$ geteilt liefert:

$$(bb-aa)^4-ac(bb-aa)^3-3aacc(bb-aa)^2-ac^3(bb-3aa)(bb-aa)$$
$$-aac^4(2bb-3aa)-ac^5(bb-3aa)-aac^6-ac^7=0,$$

aus deren Entwicklung diese Form entsteht:

$$b^8-a(c+4a)b^6-a(c^3+3acc-3aac-6a^3)b^4$$
$$-a(c+a)(cc-aa)(cc+ac-4aa)b^2-a(c+a)(cc-aa)^3=0.$$

Scholion

§17 Nun die Sache allgemein betrachtend, wenn der Winkel ABC zum Winkel A ein Verhältnis $= n : 1$ hat, dass $ABC = n \cdot BAC$ ist, wollen wir, nachdem die Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ gesetzt worden sind, die Gleichungen für die bisher für die einfacheren Fälle gefundenen betrachten, welche wir deshalb geordnet darbieten und mit Großbuchstaben bezeichnen wollen:

Für	wird sein
$n = 1$	$b - a = 0 \cdots A$
$n = 2$	$bb - a(a + c) = 0 \cdots B$
$n = 3$	$b^3 - abb - aab - a(cc - aa) = 0 \cdots C$
$n = 4$	$b^4 - a(c + 2a)bb - a(c + a)(cc - aa) = 0 \cdots D$
$n = 5$	$b^5 - ab^4 - 2aab^3 - a(cc - 2aa)bb - aa(cc - aa)b$
	$- a(cc - aa)^2 = 0 \cdots E$
$n = 6$	$b^6 - a(c + 3a)b^4 - a(c + a)(cc + ac - 3aa)bb$
	$- a(c + a)(cc - aa)^2 = 0 \cdots F$
$n = 7$	$b^7 - ab^6 - 3aab^5 - a(cc - 3aa)b^4 - aa(2cc - 3aa)b^3$
	$- a(cc - aa)(cc - 3aa)bb - aa(cc - aa)^2 b$
	$- a(cc - aa)^3 = 0 \cdots G$
$n = 8$	$b^8 - a(c + 4a)b^6 - a(c^3 + 3acc - 3aac - 6a^3)b^4$
	$- a(c + a)(cc - aa)(cc + ac - 4aa)b^2$
	$- a(c + a)(cc - aa)^3 = 0 \cdots H$

Hier ist also sofort klar, dass diese Formeln nur abwechselnd genommen bequem miteinander verglichen werden können; weil ja bei denen, welchen den geraden Zahlen entsprechen, der Buchstabe b nur gerade Dimensionen hat, bei den ungeraden hingegen auch ungerade Dimensionen außer den geraden Potenzen desselben Buchstabens b auftreten, während andererseits in diesem Fall der Buchstabe c nur gerade Dimensionen hat. Daher wollen wir diese Formeln, je nachdem ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, einzeln durchgehen, im Begriff nach einem Fortschreitungsgesetz zu suchen, wo ich freilich zuerst zeigen möchte, dass in jedem der beiden Fälle diese Formeln eine rekurrente Reihe bilden, von welcher jeder Term durch die beiden vorhergehenden bestimmt wird; danach werde ich auch versuchen, eine allgemeine Formel darzubieten.

PROBLEM 6

§18 Wenn im Dreieck ABC der Winkel $B = 2iA$ war, während $2i$ irgendeine gerade ganze Zahl bezeichnet, die Natur der Relation, die zwischen den Seiten $AB = c$, $AC = b$ und $BC = a$ besteht, ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Hier muss also die Progression aller zweiten Formeln betrachtet werden, welche wir zuvor mit den Buchstaben B, D, F, H etc. bezeichnet haben, welche sich so verhalten:

$$
\begin{array}{c|l}
\text{für} & \qquad \text{ist folgende Formel gefunden worden} \\
i = 1 & B = bb - a(c+a) = 0 \\
i = 2 & D = b^4 - a(c+2a)bb - a(c+a)(cc-aa) = 0 \\
i = 3 & F = b^6 - a(c+3a)b^4 - a(c+a)(cc+ac-3aa)bb \\
 & \qquad -a(c+a)(cc-aa)^2 = 0 \\
i = 4 & H = b^8 - a(c+4a)b^6 - a(c^3+3acc-3aac-6a^3)b^4 \\
 & \qquad -a(c+a)(cc-aa)(cc+ac-4aa)bb - a(c+a)(cc-aa)^3 = 0
\end{array}
$$

damit wir das Fortschreitungsgesetz von diesen Formeln leichter bemerken, wollen wir sie auch nach den Potenzen des Buchstaben c ordnen:

$$\begin{array}{c|l}
\text{für} & \qquad \text{wird sein} \\
i=1 & B=(bb-aa)-ac=0 \\
i=2 & D=(bb-aa)^2-ac(bb-aa)-aacc-ac^3=0 \\
i=3 & F=(bb-aa)^3-ac(bb-aa)^2-2aacc(bb-aa) \\
 & \qquad -ac^3(bb-2aa)-aac^4-ac^5=0 \\
i=4 & H=(bb-aa)^4-ac(bb-aa)^3-3aacc(bb-aa)^2 \\
 & \qquad -ac^3(bb-3aa)(bb-aa)-aac^4(2bb-3aa) \\
 & \qquad -ac^5(bb-3aa)-aac^6-ac^7=0.
\end{array}$$

Hier beobachte ich zuerst, wenn von einer Formeln die vorhergehende mit $bb-aa$ multipliziert abgezogen wird, dass die Reste um vieles einfacher sein werden; denn es wird sein:

$$\begin{aligned}
D-B(bb-aa) &= -aacc-ac^3 \\
F-D(bb-aa) &= -aacc(bb-aa)+a^3c^3-aac^4-ac^5 \\
H-F(bb-aa) &= -aacc(bb-aa)^2+a^3c^3(bb-aa) \\
&\quad -aac^4(bb-2aa)+2a^3c^5-aac^6-ac^7
\end{aligned}$$

man ziehe darüber hinaus von jeder beliebigen die vorhergehende mit cc multipliziert ab, und man wird finden:

$$\begin{aligned}
D-B(bb-aa+cc) &= -bbcc \\
F-D(bb-aa+cc) &= -bbcc(bb-aa)+abbc^3 \\
H-F(bb-aa+cc) &= -bbcc(bb-aa)^2+abbc^3(bb-aa) \\
&\quad +aabbc^4+abbc^5
\end{aligned}$$

welche durch $-bbcc$ geteilt

$$\frac{B(bb-aa+cc)-D}{bbcc}=1$$

$$\frac{D(bb-aa+cc)-F}{bbcc}=bb-aa-ac=B$$

$$\frac{F(bb-aa+cc)-H}{bbcc}=(bb-aa)^2-ac(bb-aa)-aacc-ac^3=D$$

liefert, wo es im gegenwärtigen Fall nicht zu passieren scheint, dass zuerst freilich die Einheit, dann aber die Buchstaben B und D hervorgehen; für die daraus aufzustellende Induktion würden die zwei Fälle gewiss keineswegs ausreichen, aber, nachdem die Rechnung bis hin zur folgenden Formel K fortgesetzt worden ist, gelingt dasselbe freilich nicht nur, sondern auch für die ungeraden Buchstaben A, C, E, G wird danach dasselbe Fortschreitungsgesetz entdeckt werden. Deswegen bezweifle ich, mich auf diese Induktion stützend, nicht auszusprechen, dass diese Formeln B, D, F, H etc. eine rekurrente Reihe festlegen, deren Relationsskala

$$bb-aa+cc, \quad -bbcc$$

ist, und daher der $i=0$ vorausgehende Term die Einheit ist. Nachdem also diese Formeln wie folgt angeordnet worden sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} i\cdots & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7 \text{ etc.} \\ & 1, & B, & D, & F, & H, & K, & M, & O \text{ etc.} \end{array}$$

wird zuerst freilich $B=bb-aa-ac$, dann aber nach dem Gesetz der rekurrenten Reihe:

$$\begin{aligned} D &= (bb-aa+cc)B - bbcc\cdot 1 && \text{für} \quad n=4 \\ F &= (bb-aa+cc)D - bbcc\cdot B && \text{für} \quad n=6 \\ H &= (bb-aa+cc)F - bbcc\cdot D && \text{für} \quad n=8 \\ K &= (bb-aa+cc)H - bbcc\cdot F && \text{für} \quad n=10 \\ M &= (bb-aa+cc)K - bbcc\cdot H && \text{für} \quad n=12 \end{aligned}$$

etc.,

woher sich diese Formeln beliebig weit fortsetzen lassen.

KOROLLAR 1

§19 Wenn also diese Reihe gebildet wird; $1 + Bz + Dz^2 + Fz^3 +$ etc., entsteht sie aus einer Entwicklung eines Bruchs von dieser Art:

$$\frac{1 + \triangle z}{1 - (bb - aa + cc)z + bbcczz},$$

wo freilich $\triangle = -ac - cc$ ist, und dieser Bruch bietet also die Summe der bis ins Unendliche fortgesetzen Reihe dar.

KOROLLAR 2

§20 Daher lässt sich weiter im Allgemeinen eine unbestimmt der Zahl i zukommende Formel darbieten, welche natürlich so ausgedrückt werden wird:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}\left(\frac{bb - aa + cc + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc}}{2}\right)^i\\ +&\mathfrak{B}\left(\frac{bb - aa + cc - \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc}}{2}\right)^i\end{aligned}$$

wo freilich, nach Anwendung auf die zwei ersten, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1$ und

$$\frac{bb - aa + cc}{2} + \frac{1}{2}(\mathfrak{A} - \mathfrak{B})\sqrt{\cdots} = bb - aa - ac$$

oder

$$\mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{bb - (a + c)^2}{\sqrt{\cdots}} = \sqrt{-\frac{(a + c + b)(a + c - b)}{(a + b - c)(b + c - a)}}$$

wird.

SCHOLION

§21 Diese allgemeine Formel verdient mit umso größerer Sorgfalt entwickelt zu werden, weil sie bis hierher allein auf Induktion gestützt ist und daher einer weiteren Bestätigung bedarf. Es seinen also die Seiten des Dreiecks ABC (Fig. 4)[4] $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ und die Winkel $A = \alpha$, $B = \beta$, $C = \gamma$, wo wir freilich annehmen, dass $\beta = 2i\alpha$ ist.

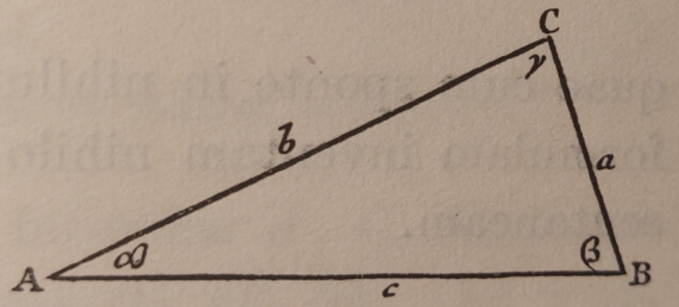

Fig. 4

Nun ist aber

$$\cos\alpha = \frac{bb - aa + cc}{2bc} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2aabb + 2aacc + 2bbcc - a^4 - b^4 - c^4}}{2bc},$$

aus welcher unsere gefundene Formel diese Form annehmen wird:

$$\mathfrak{A}(bc\cos\alpha + bc\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)^i + \mathfrak{B}(bc\cos\alpha - bc\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)^i,$$

welche nach bekannten Regeln in diese überführt wird:

$$\mathfrak{A}b^ic^i(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha) + \mathfrak{B}b^ic^i(\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha).$$

Weil aber

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{bb - (a+c)^2}{2bc\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}$$

ist, folgt aus der Formel

$$\cos\beta = \cos 2i\alpha = \frac{aa + cc - bb}{2ac},$$

dass

[4] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

$$1+\cos 2i\alpha = \frac{(a+c)^2 - bb}{2ac} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{a(1+\cos 2i\alpha)}{b\sqrt{-1}\cdot \sin\alpha}$$

sein wird; aber ist $\sin\alpha : \sin 2i\alpha = a : b$, woher

$$\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{1+\cos 2i\alpha}{\sqrt{-1}\cdot \sin 2i\alpha} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\cos i\alpha}{\sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha}$$

ist. Deshalb wird man

$$\mathfrak{A} = \frac{-\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha}{2\sqrt{-1}\sin i\alpha} \quad \text{und} \quad \mathfrak{B} = \frac{\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot \sin\alpha}$$

haben und so wird die gefundene Formel

$$\frac{b^i c^i}{2\sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha}((\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha)(-\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha)$$
$$+(\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha)(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot \sin i\alpha)),$$

weil diese von selbst verschwindet, ist es ersichtlich, dass in dem Fall, in dem der Winkel $\beta = 2i\alpha$ ist, die gefundene Formel gleich Null ist und daher auch die Induktion mit der Wahrheit verträglich ist.

Problem 7

§22 Wenn im Dreieck ABC der Winkel $\beta = (2i+1)\alpha$ war, während $2i+1$ irgendeine ganze ungerade ist, die Natur der Relation, die daher zwischen den Seiten des Dreiecks, a, b, c, besteht, ausfindig zu machen.

Lösung

Aus der Reihe der oben (§ 17) dargebotenen Reihe der Formeln müssen die ungeraden betrachtet werden, welche mit den Buchstaben A, C, E, G etc. bezeichnet worden sind und sich geordnet so verhalten:

Für	ist die gefundene Formel
$i=0$	$A = b - a = 0$
$i=1$	$C = b^3 - abb - aab - a(cc - aa) = 0$
$i=2$	$E = b^5 - ab^4 - 2aab^3 - a(cc - 2aa)bb - aa(cc - aa)b$
	$-a(cc - aa)^2 = 0$
$i=3$	$G = b^7 - ab^6 - 3aab^5 - a(cc - aa)b^4 - aa(2cc - 3aa)b^3$
	$-a(cc - aa)(cc - 3aa)bb - aa(cc - aa)^2 b - a(cc - aa)^3 = 0$

welche selben nach den Potenzen von c geordnet so dargestellt werden:

Für	ist die gefundene Formel
$i=0$	$A = (b - a) = 0$
$i=1$	$C = (b - a)(bb - aa) - acc = 0$
$i=2$	$E = (b - a)(bb - aa)^2 - acc(bb + ab - 2aa) - ac^4 = 0$
$i=3$	$G = (b - a)(bb - aa)^3 - acc(bb - aa)(bb + 2ab - 3aa)$
	$-ac^4(bb + ab - 3aa) - ac^6 = 0.$

Und aus diesen erschließen wir zuerst:

$$(bb - aa)A - C = acc$$
$$(bb - aa)C - E = aacc(b - a) + ac^4$$
$$(bb - aa)E - G = aacc(bb - aa)(b - a) + aac^4(b - 2a) + ac^6$$

dann aber weiter:

$$(bb - aa + cc)A - C = bcc$$
$$(bb - aa + cc)C - E = bbcc(b - a) = bbccA$$
$$(bb - aa + cc)E - G = bbcc(b - a)(bb - aa) - abbc^4 = bbccC,$$

Daher schließen wir schon mit viel größerem Vertrauen, dass diese Formeln A, C, E, G etc. eine rekurrente Reihe bilden, deren Relationsskala $bb - aa + cc$, $-bbcc$ ist, und der dem ersten A vorausgehende Term $= \frac{1}{b}$ ist. Daher werden aus den ersten zwei $A = b - a$ und $C = (b-a)(bb-aa) - acc$ die folgenden nach diesem Gesetz gebildet:

$$\begin{aligned} E &= (bb - aa + cc)C - bbccA \quad &\text{für} \quad n &= 5 \\ G &= (bb - aa + cc)E - bbccC \quad &\text{für} \quad n &= 7 \\ I &= (bb - aa + cc)G - bbccE \quad &\text{für} \quad n &= 9 \\ L &= (bb - aa + cc)I - bbccG \quad &\text{für} \quad n &= 11 \\ N &= (bb - aa + cc)L - bbccI \quad &\text{für} \quad n &= 13 \end{aligned}$$

Korollar 1

§23 Nachdem diese Formeln also nach der Zahl i angeordnet worden sind, wird sein

i	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6	etc.
Formel	A,	C,	E,	G,	I,	L,	N	etc.

und der unbestimmt der Zahl i zukommende Term wird, wie zuvor, von dieser Form sein:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}\left(\frac{bb - aa + cc + \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc}}{2}\right)^i \\ + &\mathfrak{B}\left(\frac{bb - aa + cc - \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2aabb - 2aacc - 2bbcc}}{2}\right)^i \end{aligned}$$

Korollar 1

§24 Die Koeffizienten $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ werden aus den beiden Anfangstermen A und C so bestimmt, dass zuerst

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = A = b - a$$

ist, dann aber

$$\frac{(b-a)(bb-aa+cc)}{2}+\frac{1}{2}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\sqrt{\cdots}=(b-a)(bb-aa)-acc,$$

also

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\sqrt{\cdots}&=(b-a)(bb-aa)-(b+a)cc\\&=(b+a)(bb-2ab+aa-cc)\end{aligned}$$

und daher

$$\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)((b-a)^2-cc)}{\sqrt{a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc}}.$$

SCHOLION

§25 Wir wollen diese allgemeine Formel in der gleichen Weise entwickeln, auf die wir es zuvor gemacht haben (§ 21), und unsere allgemeine Formel wird, völlig wie zuvor, sein:

$$\mathfrak{A}(bc\cos\alpha+bc\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)^i+\mathfrak{B}(bc\cos\alpha-bc\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)^i,$$

welche gleichermaßen in diese übergeht:

$$\mathfrak{A}b^ic^i(\cos i\alpha+\sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha)+\mathfrak{B}b^ic^i(\cos i\alpha-\sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha),$$

wo

$$\mathfrak{A}+\mathfrak{B}=b-a\quad\text{und}\quad\mathfrak{A}-\mathfrak{B}=\frac{(b+a)((b-a)^2-cc)}{2bc\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}$$

ist. Nun wird aber, wegen des Winkels $\gamma=180^\circ-2(i+1)\alpha$,

$$\cos 2(i+1)\alpha=\frac{cc-aa-bb}{2ab}\quad\text{und}\quad 1+\cos 2(i+1)\alpha=\frac{cc-(b-a)^2}{2ab}$$

sein, weiter

$$\mathfrak{B}-\mathfrak{A}=\frac{a(b+a)(1+\cos 2(i+1)\alpha)}{c\sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}.$$

Aber es ist

$$a : c = \sin\alpha : \sin 2(i+1)\alpha \quad \text{und daher} \quad \mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{(b+a)\cos(i+1)\alpha}{\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha},$$

woher wir

$$\mathfrak{A} = \frac{-(b+a)\cos(i+1)\alpha + (b-a)\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha}$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{(b+a)\cos(i+1)\alpha + (b-a)\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha}{2\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha}$$

berechnen. Weil ja die Seiten a und b den Sinus der gegenüberliegenden Winkel proportional sind, wollen wir $a = 2f\sin\alpha$ und $b = 2f\sin(2i+1)\alpha$ setzen und es wird

$$\begin{aligned}
a\cos(i+1)\alpha &= f(\sin(i+2)\alpha - \sin i\alpha)\\
a\sin(i+1)\alpha &= f(\cos i\alpha - \cos(i+2)\alpha)\\
b\cos(i+1)\alpha &= f(\sin(3i+2)\alpha + \sin i\alpha)\\
b\sin(i+1)\alpha &= f(\cos i\alpha - \cos(3i+2)\alpha)
\end{aligned}$$

sein, woher wir berechnen:

$$(a+b)\cos(i+1)\alpha = f(\sin(i+2)\alpha + \sin(3i+2)\alpha)$$

und

$$(b-a)\sin(i+1)\alpha = f(\cos(i+2)\alpha - \cos(3i+2)\alpha).$$

Daher weil allgemein

$$\sin\mu + \sin\nu = 2\sin\frac{\mu+\nu}{2}\cos\frac{\nu-\mu}{2}$$

und

$$\cos\mu - \cos\nu = 2\sin\frac{\mu+\nu}{2}\sin\frac{\nu-\mu}{2}$$

ist, werden wir haben:

$$(a+b)\cos(i+1)\alpha = 2f\sin(2i+2)\alpha\cos i\alpha$$

und

$$(b-a)\sin(i+1)\alpha = 2f\sin(2i+2)\alpha\sin i\alpha$$

und deshalb erlangen wir:

$$\mathfrak{A} = \frac{f\sin(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha}(-\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha)$$

und

$$\mathfrak{B} = \frac{f\sin(2i+2)\alpha}{\sqrt{-1}\cdot\sin(i+1)\alpha}(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha),$$

woher es klar ist, dass

$$\mathfrak{A}(\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha) + \mathfrak{B}(\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha) = 0$$

sein wird, wodurch die Gültigkeit unserer Induktion gezeigt wird. Nachdem dies aber bemerkt worden ist, lässt sich erst jetzt die Lösung unseres Problems direkt angehen.

Problem 8

§26 Wenn im Dreieck ABC der Winkel B zum Winkel A irgendein vielfaches Verhältnis hat, wie n zu 1, die Relation, die daher zwischen den Seiten des Dreiecks, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, besteht, analytisch ausfindig zu machen.

Lösung

Nachdem der Winkel $A = \alpha$ gesetzt worden ist, dass der Winkel $B = n\alpha$ ist, wird, wie aus der Lehre der Winkel bekannt ist, sein:

$$\cos n\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin n\alpha = (\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)^n$$

und

$$\cos n\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin n\alpha = (\cos\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha)^n,$$

und daher

$$\frac{\cos n\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin n\alpha}{\cos n\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin n\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}\right)^n.$$

Je nachdem, ob n eine gerade oder ungerade Zahl ist, sind zwei Fälle zu entwickeln. Es sei zuerst $n = 2i$ und auf beiden Seiten die Quadratwurzel gezogen worden, und es wird werden:

$$\frac{\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha}{\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}\right)^i;$$

nun ist aber $\cos 2i\alpha = \frac{aa+cc-bb}{2ac}$ und daher $\cos i\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a+c)^2-bb}{bb}}$ und $\sin i\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{bb-(c-a)^2}{ac}}$, weiter

$$\cos\alpha = \frac{bb-aa+cc}{2bc} \quad \text{und} \quad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2aabb+2aacc+2bbcc-a^4-b^4-c^4}}{2bc}.$$

Es sei der Kürze wegen

$$\triangle = \sqrt{a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc},$$

und unsere Gleichung wird

$$\frac{(a+c)^2-bb+\triangle}{(a+c)^2-bb-\triangle} = \left(\frac{bb-aa+cc+\triangle}{bb-aa+cc-\triangle}\right)^i$$

oder

$$\begin{aligned}&((a+c)^2-bb-\triangle)(bb-aa+cc+\triangle)^i\\ -&((a+c)^2-bb+\triangle)(bb-aa+cc-\triangle)^i = 0,\end{aligned}$$

welche durch $2\triangle$ geteilt mit der oben [§ 20] gefundenen Form übereinstimmt.

Es sei weiter $n = 2i+1$, und durch Multiplizieren der Gleichung

$$\frac{\cos\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}$$

wird

$$\frac{\cos 2i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin 2i\alpha}{\cos 2i\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin 2i\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}\right)^{2i}$$

und nach Ziehen der Quadratwurzel:

$$\frac{\cos i\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha}{\cos i\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin i\alpha} = \left(\frac{\cos\alpha + \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha - \sqrt{-1}\cdot\sin\alpha}\right)^{i}.$$

Weil nun $\gamma = 180^\circ - 2(i+1)\alpha$ ist, wird

$$\cos 2(i+1)\alpha = \frac{cc - bb - aa}{2ab}$$

und daher

$$\cos(i+1)\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{cc-(b-a)^2}{ab}} \quad \text{und} \quad \sin(i+1)\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+a)^2-cc}{ab}}.$$

Es ist aber

$$\cos\alpha = \frac{bb-aa+cc}{2bc} \quad \text{und} \quad \sin\alpha\sqrt{-1} = \frac{\Delta}{2bc} \quad \text{oder} \quad \sin\alpha = \frac{\Delta}{2bc\cdot\sqrt{-1}},$$

wo man bemerke, dass

$$\frac{\Delta}{\sqrt{-1}} = \sqrt{(cc-(b-a)^2)((b+a)^2-cc)}$$

ist; deswegen wird man finden

$$\cos i\alpha = \frac{1}{4bc\sqrt{ab}}\left((bb-aa+cc)\sqrt{cc-(b-a)^2} + ((b+a)^2-cc)\sqrt{cc-(b-a)^2}\right)$$

oder

$$\cos i\alpha = \frac{b+a}{2c\sqrt{ab}}\sqrt{cc-(b-a)^2},$$

dann aber

$$\sin i\alpha = \frac{1}{4bc\sqrt{ab}}\left((bb-aa+cc)\sqrt{(b+a)^2-cc}-(cc-(b-a)^2)\sqrt{(b+a)^2-cc}\right)$$

oder

$$\sin i\alpha = \frac{b-a}{2c\sqrt{ab}}\sqrt{(b+a)^2-cc}.$$

Nach Einsetzen von diesen wird sein:

$$\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)+(b-a)\triangle}{(b+a)(cc-(b-a)^2)-(b-a)\triangle} = \left(\frac{bb-aa+cc+\triangle}{bb-aa+cc-\triangle}\right)^i$$

und die daraus oben [§ 24] gefundene Gleichung wird berechnet:

$$\left(b+a-\frac{(b-a)\triangle}{cc-(b-a)^2}\right)(bb-aa+cc+\Delta)^i - \left(b+a+\frac{(b-a)\triangle}{cc-(b-a)}\right)(bb-aa+cc-\triangle)^i = 0,$$

wenn diese nur mit $\frac{cc-(b-a)^2}{-2\triangle}$ multipliziert wird, und aus dieser Form wird zugleich die Natur der rekurrenten Reihe eingesehen.

KOROLLAR 1

§27 Für den Fall, in dem in dem Dreieck ABC der Winkel $B = 2iA$ ist, ist die die Relation ausdrückende Gleichung:

$$\left(1+\frac{bb-(a+c)^2}{\triangle}\right)(bb-aa+cc+\triangle)^i + \left(1-\frac{bb+(a+c)^2}{\triangle}\right)(bb-aa+cc-\triangle)^i = 0,$$

aber für den Fall, in dem der Winkel $B = (2i+1)A$ ist, hat man:

$$\left(b-a-\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)}{\triangle}\right)(bb-aa+cc+\triangle)^i$$
$$+\left(b-a+\frac{(b+a)(cc-(b-a)^2)}{\triangle}\right)(bb-aa+cc-\triangle)^i = 0.$$

Korollar 2

§28 Wenn wir daher also diese Formen festlegen:

$$\left(\frac{bb-aa+cc+\triangle}{2}\right)^i + \quad \left(\frac{bb-aa+cc-\triangle}{2}\right)^i = V,$$

$$\frac{1}{\triangle}\left(\frac{bb-aa+cc+\triangle}{2}\right)^i - \frac{1}{\triangle}\left(\frac{bb-aa+cc-\triangle}{2}\right)^i = W,$$

von welchen jede der beiden obgleich der irrationalen Formel:

$$\triangle = \sqrt{a^4+b^4+c^4-2aabb-2aacc-2bbcc} = \sqrt{(bb-aa+cc)^2-4bbcc}$$

rational ist, wird für den Fall $B = 2iA$

$$V + (bb-(a+c)^2)W = 0,$$

für den Fall $B = (2i+1)A$ hingegen

$$(b-a)V + (b+a)((b-a)^2-cc)W = 0$$

sein.

Korollar 3

§29 Wenn daher für die einzelnen Werte der ganzen Zahl i die beiden Formen V und W entwickelt werden, werden zwei gemäß derselben Relationsskala $bb-aa+cc, -bbcc$ fortzusetzende rekurrente Reihen entspringen, aus welchen darauf folgend jene beiden Eigenschaften der Dreiecke leicht dargeboten werden.

Scholion

§30 Um diese Reihe etwas komprimierter auszudrücken, sei der Kürze wegen $bb-aa+cc = ff$ und für die erste Reihe $v = \left(\frac{ff+\triangle}{2}\right)^i + \left(\frac{ff-\triangle}{2}\right)^i$.

Wegen $\triangle = \sqrt{f^4-4bbcc}$ und der Relationsskala $ff, -bbcc$ werden wir finden:

Für	ist V
$i=0$	2
$i=1$	ff
$i=2$	$f^4-2bbcc$
$i=3$	$f^6-3bbccff$
$i=4$	$f^8-4bbccf^4+2b^4c^4$
$i=5$	$f^{10}-5bbccf^6+5b^4c^4ff$
$i=6$	$f^{12}-6bbccf^8+9b^4c^4f^4-2b^6c^6$
$i=7$	$f^{14}-7bbccf^{10}+14b^4c^4f^6-7b^6c^6ff,$

woher gefolgert wird, dass allgemein

$$V=f^{2i}-ibbccf^{2i-4}+\frac{i(i-3)}{1\cdot 2}b^4c^4f^{2i-8}-\frac{i(i-4)(i-5)}{1\cdot 2\cdot 3}b^6c^6f^{2i-12}+\text{etc.}$$

sein wird. Weiter wird für die andere Form

$$W=\frac{1}{\triangle}\left(\frac{ff+\triangle}{2}\right)^i-\frac{1}{\triangle}\left(\frac{ff-\triangle}{2}\right)^i$$

die folgende Reihe entstehen:

Für	ist W
$i=0$	0
$i=1$	1
$i=2$	ff
$i=3$	f^4-bbcc
$i=4$	$f^6-2bbccff$
$i=5$	$f^8-3bbccf^4+b^4c^4$
$i=6$	$f^{10}-4bbccf^6+3b^4c^4ff$
$i=7$	$f^{12}-5bbccf^8+6b^4c^4f^4-b^6c^6,$

woher im Allgemeinen diese Form

$$W = f^{2i-2} - (i-2)bbccf^{2i-6}$$
$$+\frac{(i-3)(i-4)}{1\cdot 2}b^4c^4f^{2i-10} - \frac{(i-4)(i-5)(i-6)}{1\cdot 2\cdot 3}b^6c^6f^{2i-14} + \text{etc.}$$

sein wird, wo naürlich sorgfältig zu bemerken ist, dass diese beiden allgemeinen Ausdrücke nur bis hin zu den verschwindenden Termen fortgeführt werden müssen, auch wenn danach erneut endliche Terme auftreten würden. Übrigens ist daher klar, dass

$$\frac{1}{2}(V+ffW) = f^{2i} - (i-1)bbccf^{2i-4}$$
$$+\frac{(i-2)(i-3)}{1\cdot 2}b^4c^4f^{2i-8} - \frac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1\cdot 2\cdot 3}b^6c^6f^{2i-12} + \text{etc.}$$

sowie

$$\frac{1}{2}(V-ffW) = -bbccf^{2i-4} + (i-3)b^4c^4f^{2i-8} - \frac{(i-4)(i-5)}{1\cdot 2}b^6c^6f^{2i-12}$$
$$+\frac{(i-5)(i-6)(i-7)}{1\cdot 2\cdot 3}b^8c^8f^{2i-16} - \text{etc}$$

Daher wird nun für den Fall der Dreiecke, wo der Winkel $B = 2iA$ ist, wegen $bb = ff + aa - cc$ die die Relation der Seiten ausdrückende Gleichung sein:

$$\frac{1}{2}(V+ffW) - c(a+c)W = 0,$$

aber für den anderen Fall, wo der Winkel $B = (2i+1)A$ ist, wird, nachdem hier $cc = ff - bb + aa$ gesetzt worden ist, die die Relation der Seiten ausdrückende Gleichung sein:

$$\frac{1}{2}b(V-ffW) - \frac{1}{2}a(V+ffW) + b(bb-aa)W = 0.$$

Aber auch hier können auf eine andere Weise diese allgemeinen Ausdrücke ohne Einführung der Größe $ff = bb - aa + cc$ dargesetellt werden, wie wir im folgenden Problem sehen werden.

PROBLEM 9

§31 Wenn im Dreieck ABC der Winkel B zum Winkel A irgendein beliebiges vielfaches Verhältnis hat, wie n zu 1, die Gleichung, mit welcher die Relation zwischen den Seiten $Ab = c$, $AC = b$ und $BC = a$ ausgedrückt wird, im Allgemeinen darzubieten.

LÖSUNG

Wenn wir die oben für die einzelnen Fälle gefundenen Gleichungen genauer betrachten, werden wir ohne Mühe ein gewisses Gesetz im Fortschreiten der Terme beobachten, welches aus der bewiesenen Natur der Progression leicht zu bestätigen ist. Es müssen hier aber zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem ob jene Zahl n gerade oder ungerade war. Für jeden der beiden Fälle wird die gesuchte Gleichung auf die folgende Weise dargeboten werden können:

Für den Fall, in dem $n = 2i$ ist,

verhält sich die die Relation der Seiten ausdrückende Gleichung so:

$$\frac{b^{2i}}{a} = cb^{2i-2} + c(cc-(i-1)aa)b^{2i-4} + c\left(c^4 - 2(i-2)aacc + \frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^4\right)b^{2i-6}$$
$$+c\left(c^6 - 3(i-3)a^2c^4 + 3\frac{(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^4c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\right)b^{2i-8}$$
$$+c\left(c^8 - 4(i-4)a^2c^6 + 6\frac{(i-4)(i-3)}{1\cdot 2}a^4c^4 - 4\frac{(i-4)(i-3)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^6c^2 + \frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^8\right)b^{2i-10}$$

$+$etc.

$$+iab^{2i-2} + a\left((i-1)cc - \frac{(i-1)i}{1\cdot 2}aa\right)b^{2i-4} + a\left((i-2)c^4 - 2\frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^2c^2 + \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^4\right)b^{2i-6}$$
$$+a\left((i-3)c^6 - 3\frac{(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^2c^4 + 3\frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^4c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^6\right)b^{2i-8}$$
$$+\left((i-4)c^8 - 4\frac{(i-4)(i-3)}{1\cdot 2}a^2c^6 + 6\frac{(i-4)(i-3)(i-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^4c^4 - 4\frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^6c^2\right.$$
$$\left. + \frac{(i-4)(i-3)(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5a^8}\right)$$

$+$etc.,

deren Fortschreitungsgesetz hinreichend offensichtlich ist.

Für den Fall, in dem $n = 2i + 1$ ist,

verhält sich die die Relation der Seiten der Seiten ausdrückende Gleichung so:

$$
\begin{aligned}
\frac{b^{2i+1}}{a} = b^{2i} &+ (cc - iaa)b^{2i-2} + \left(c^4 - 2(i-1)aacc + \frac{(i-1)i}{1\cdot 2}a^4\right)b^{2i-4}\\
&+ \left(c^6 - 3(i-2)a^2c^4 + 3\frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^4c^2 - \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^6\right)b^{2i-6}\\
&+ \text{etc.}\\
&+ iab^{2i-1} + a\left((i-1)cc - \frac{(i-1)i}{1\cdot 2}aa\right)b^{2i-3}\\
&+ a\left((i-2)c^4 - 2\frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^2c^2 + \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^4\right)b^{2i-5}\\
&+ a\left((i-3)c^6 - 3\frac{(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^2c^4 + 3\frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^4c^2 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^6\right)b^{2i-7}\\
&+ \text{etc.,}
\end{aligned}
$$

welche Gleichung gefälliger in dieser Form, nach Potenzen von c geordnet, dargestellt werden kann:

$$
\begin{aligned}
\frac{b^{2i+1}}{a} = c^{2i} &+ \left\{\begin{matrix} bb - iaa \\ +ab \end{matrix}\right\} + c^{2i-4}\left\{\begin{matrix} b^4 - 2(i-1)aabb + \frac{(i-1)i}{1\cdot 2}a^4 \\ +2ab^3 - (i-1)a^3b \end{matrix}\right\}\\
&+ c^{2i-6}\left\{\begin{matrix} b^6 - 3(i-2)a^2b^4 + 3\frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^4b^2 - \frac{(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3}a^6 \\ +3ab^5 - 3(i-2)a^3b^3 + \frac{(i-2)(i-1)}{1\cdot 2}a^5b \end{matrix}\right\}\\
&+ c^{2i-8}\left\{\begin{matrix} b^8 - 4(i-3)a^2b^6 + 6\frac{(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^4b^4 - 4\frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^6b^2 + \frac{(i-3)(i-2)(i-1)i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^8 \\ +4ab^7 - 6(i-3)a^3b^5 + 4\frac{(i-3)(i-2)}{1\cdot 2}a^5b^3 - \frac{(i-3)(i-2)(i-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^7b \end{matrix}\right\}\\
&+ \text{etc}
\end{aligned}
$$

Scholion

§32 Mit diesen Betrachtungen scheint die Lehre der Dreiecke nicht unwesentlich erweitert zu werden, während, sobald in einem Dreieck das Verhältnis zwischen den beiden Seiten bekannt ist, zugleich eine bestimmte Relation zwischen seinen Seiten dargeboten werden kann. Weil aber diese Dinge allzu allgemein sind, weil ja aus dieser Relation eine Seite durch die beiden übrigen bestimmt wird, wird es gefällig sein, diese gefundenen allgemeinen Eigenschaften auf eine gewisse Gattung von Dreiecken anzuwenden, wo freilich die gleichschenkligen Dreiecke besonders herausstechen, weil in ihnen oftmals das Verhältnis zwischen dem vertikalen Winkel und den Winkeln zur Basis vorgeschrieben zu werden pflegen, wie es beispielsweise bei der Konstruktion von regelmäßigen Polygonen der Fall ist. Aber hier tauchen zwei zu entwickelnde Fälle auf, je nachdem ob der Winkel zur Basis ein Vielfaches des vertikalen Winkels ist oder der vertikale Winkel ein Vielfaches des Winkels zur Basis ist; die beiden Fälle werde ich in den folgenden Problemen erledigen.

Problem 10

§33 Wenn im gleichschenkligen Dreieck BAC (Fig. 5)[5] der Winkel zur Basis ein Vielfaches des vertikalen Winkels A im Verhältnis $n:1$ war, die Relation zwischen der Basis $BC = a$ und den Seiten $AB = AC = b$ ausfindig zu machen.

[5] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version.

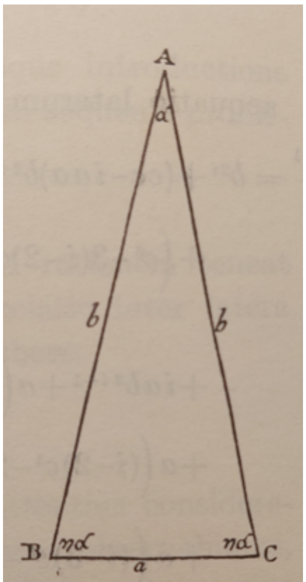

Fig. 5

LÖSUNG

Es ist zuerst zu bemerken, dass wegen dieses Verhältnisses die Winkel selbst gegeben sind; denn nachdem das Maß zweier rechter Winkel $= \pi$ und der vertikale Winkel $A = \alpha$ gesetzt worden ist, wird wegen $\alpha + 2n\alpha = \pi$ entsprechend $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$. Nun wird durch Anwenden der zuvor gefundenen Formeln auf diesen Fall $c = b$ sein, und nachdem die zwei Fälle getrennt behandelt worden sind, je nachdem ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, in jedem von welchen beiden Fällen die Formeln eine rekurrente Reihe festlegen, deren Relationsskala $2bb - aa$, $-b^4$ ist, werden wir, zuerst $n = 2i$ setzend, haben:

Für	diese Gleichungen
$i=0$	$I=0$
$i=1$	$B=bb-ab-aa=0$
$i=2$	$D=b^4-2ab^3-3aabb+a^3b+a^4=0$
$i=3$	$F=b^6-3ab^5-6aab^4+4a^3b^3+5a^4bb-a^5bb-a^5b-a^6=0$
$i=4$	$H=b^8-4ab^7-10aab^6+10a^3b^5+15a^4b^4$ $-6a^5b^3-7a^6b^2+a^7b+a^8=0,$

woher wir schließen, dass im Allgemeinen sein wird:

$$0=b^{2i}-iab^{2i-1}-\frac{i(i+1)}{1\cdot 2}a^2b^{2i-2}+\frac{i(ii-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^{2i-3}$$
$$+\frac{i(ii-1)(i+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4b^{2i-4}-\frac{i(ii-1)(ii-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^5b^{2i-5}-\frac{i(ii-1)(ii-4)(i+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^6b^{2i-6}$$
etc.

Für den anderen Fall, in welchem $n=2i+1$ ist, werden wir haben

Für	diese Gleichungen
$i=0$	$A=b-a=0$
$i=1$	$C=b^3-2abb-aab+a^3=0$
$i=2$	$E=b^5-3ab^4-3aab^3+4a^3b^2+a^4b-a^5=0$
$i=3$	$G=b^7-4ab^6-6aab^5+10a^3b^4+5a^4b^3-6a^5b^2-a^6b+a^7=0,$

woher wir schließen, dass im Allgemeinen sein wird:

$$0=b^{2i+1}-(i+1)ab^{2i}-\frac{i(i+1)}{1\cdot 2}a^2b^{2i-1}+\frac{i(i+1)(i+2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^{2i-2}$$
$$+\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4b^{2i-3}-\frac{(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^5b^{2i-4}$$
$$-\frac{(i-2)(i-1)i(i+1)(i+2)(i+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}a^6b^{2i-5}+\text{etc.},$$

welche Form, wenn wir $n = 2i - 1$ setzen, gefälliger so dargeboten wird:

$$0 = b^{2i-1} - iab^{2i-2} - \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2} a^2 b^{2i-3} + \frac{i(ii-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 b^{2i-4}$$
$$+ \frac{i(ii-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a^4 b^{2i-5} - \frac{i(ii-1)(ii-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} a^5 b^{2i-6} - \frac{i(ii-1)(ii-4)(i-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} a^6 b^{2i-7} + \text{etc.}$$

KOROLLAR 1

§34 Weil in den oben dargebotenen allgemeinen Formeln $c = b$ gesetzt werden muss, wird für den Fall $n = 2i$ die allgemeine Gleichung sein:

$$\mathfrak{A} \left(\frac{2bb - aa + a\sqrt{aa - 4bb}}{2} \right)^i + \mathfrak{B} \left(\frac{2bb - aa - a\sqrt{aa - 4bb}}{2} \right)^i = 0$$

mit

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 1 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = -\frac{a + 2b}{\sqrt{aa - 4bb}},$$

und daher unsere Gleichung:

$$\left(\frac{a + 2b}{\sqrt{aa - 4bb}} - 1 \right) \left(\frac{2bb - aa + a\sqrt{aa - 4bb}}{2} \right)^i$$
$$= \left(\frac{a + 2b}{\sqrt{aa - 4bb}} + 1 \right) \left(\frac{2bb - aa - a\sqrt{aa - 4bb}}{2} \right)^i.$$

KOROLLAR 2

§35 Aber für den Fall $n = 2i + 1$, wegen $c = b$, erhalten wir aus Paragraph 23 diese Gleichung:

$$\mathfrak{A} \left(\frac{2bb - aa + a\sqrt{aa - 4bb}}{2} \right)^i + \mathfrak{B} \left(\frac{2bb - aa + a\sqrt{aa - 4bb}}{2} \right)^i = 0,$$

wo

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = b - a \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = \frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{aa-4bb}}$$

ist und daher

$$\left(b - a + \frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{aa-4bb}}\right)\left(\frac{2bb - aa + a\sqrt{aa-4bb}}{2}\right)^i$$
$$= \left(\frac{(b+a)(a-2b)}{\sqrt{aa-4bb}} - b + a\right)\left(\frac{2bb - aa - a\sqrt{aa-4bb}}{2}\right)^i.$$

Korollar 3

§36 Wenn wir für i hier $i-1$ schreiben, dass $n = 2i - 1$ ist, entspringt diese Gleichung:

$$\left(\frac{a-2b}{\sqrt{aa-4bb}} + 1\right)\left(\frac{2bb - aa + \sqrt{aa-4bb}}{2}\right)^i = \left(\frac{a-2b}{\sqrt{aa-4bb}} - 1\right)\left(\frac{2bb - aa - a\sqrt{aa-4bb}}{2}\right)^i,$$

daher gehen aber die obigen Gleichungen mit $2b$ multipliziert hervor.

Scholion

§37 Die hier dargebotenen Formeln beginnen mit der höchsten Potenz von b; dieselben können aber auch so in umgekehrter Weise dargestellt werden, dass sie mit der höchsten Potenz von a beginnen. So berechnen wir für den ersten Fall, in welchem $n = 2i$ ist, diese Gleichung:

$$0 = a^{2i} - (2i-1)a^{2i-2}b^2 + \frac{(2i-2)(2i-3)}{1 \cdot 2}a^{2i-4}b^4 - \frac{(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-6}b^6 + \text{etc.}$$
$$+ a^{2i-1}b - (2i-2)a^{2i-3}b^3 + \frac{(2i-3)(2i-4)}{1 \cdot 2}a^{2i-5}b^5 - \frac{(2i-4)(2i-5)(2i-6)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-7}b^7 + \text{etc.}$$

Aber für den zweiten Fall, in dem $n = 2i + 1$ ist, diese:

$$0 = \begin{cases} +a^{2i-1} - 2ia^{2i-1}b^2 + \dfrac{(2i-1)(2i-2)}{1 \cdot 2}a^{2i-3}b^4 - \dfrac{(2i-2)(2i-3)(2i-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-5}b^6 + \text{etc.} \\[2ex] -a^{2i}b + (2i-1)a^{2i-2}b^3 - \dfrac{(2i-2)(2i-3)}{1 \cdot 2}a^{2i-4}b^5 + \dfrac{(2i-3)(2i-4)(2i-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2i-6}b^7 - \text{etc.} \end{cases}$$

Aber es ist zu bemerken, dass diese Ausdrücke nur bis dahin fortgesetzt werden müssen, bis man zu einem verschwindendem Term gelangt, und die folgenden, auch wenn sie nicht verschwinden, dennoch verworfen werden müssen, welcher Vorschrift die obigen Formen nicht unterworfen sind, woher sie auch auf die Fälle, wo i keine ganze Zahl ist, ausgedehnt werden können, wo freilich die Gleichung aus einer unendlichen Reihen bestehen wird.

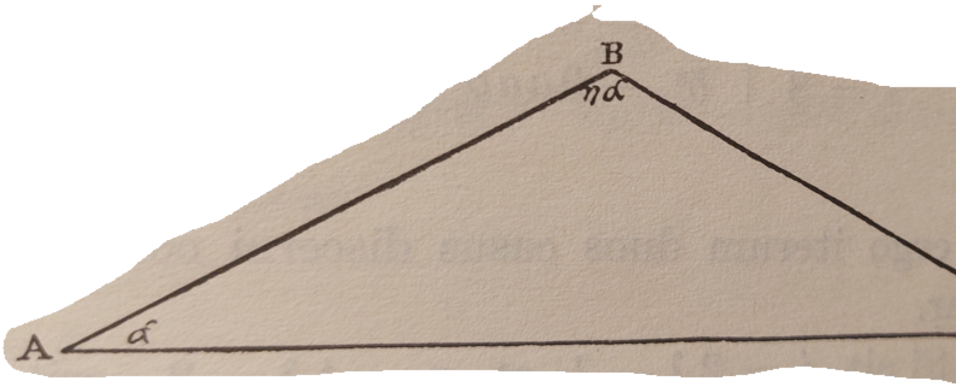

Fig. 6

PROBLEM 11

§38 Wenn im gleichsenkligen Dreieck ABC (Fig. 6)[6] der vertikale Winkel B ein Vielfaches des Winkels zur Basis, A, im Verhältnis $n : 1$ ist, dass $B = nA$ ist, die Relation zwischen der Basis $AC = b$ und dein Seiten $BA = BC = a$ ausfindig zu machen.

LÖSUNG

Nachdem die Winkel zur Basis $A = C = \alpha$ gesetzt worden sind, dass der vertikale $B = n\alpha$ ist, wird $(n+2)\alpha = \pi$ und daher $\alpha = \frac{\pi}{n+2}$ und $B = \frac{n\pi}{n+2}$ sein. In den oben gefundenen Formeln muss also $c = a$ gesetzt werden, sodass nun die Relationsskala bb, $-aabb$ ist. Daher wieder zwei Fälle unterscheidend, je nachdem ob n eine gerade oder ungerade Zahl war, werden wir haben:

Für den Fall $n = 2i$

[6] Der Scan zeigt die Figur der Opera Omnia Version

$$
\begin{array}{c|l}
\text{Für} & \quad\text{diese Gleichungen} \\
i = 0 & I = 0 \\
i = 1 & B = bb - 2aa = 0 \\
i = 2 & D = b^4 - 3aabb = 0 \\
i = 3 & F = b^6 - 4aab^4 + 2a^4bb = 0 \\
i = 4 & H = b^8 - 5aab^6 + 5a^4b^4 = 0 \\
i = 5 & K = b^{10} - 6aab^8 + 9a^4b^6 - 2a^6b^4 = 0 \\
i = 6 & M = b^{12} - 7aab^{10} + 14a^4b^8 - 7a^6b^6 = 0 \\
i = 7 & O = b^{14} - 8aab^{12} + 20a^4b^{10} - 16a^6b^8 + 2a^8b^6 = 0 \\
i = 8 & Q = b^{16} - 9aab^{14} + 27a^4b^{-}30a^6b^{10} + 9a^8b^8 = 0 \\
 & \quad\text{etc.}
\end{array}
$$

welche aus diese einfacheren Formen zurückgeführt werden:

$$
\begin{array}{c|l}
i = 1 & bb - 2aa = 0 \\
i = 2 & bb - 3aa = 0 \\
i = 3 & b^4 - 4aabb + 2a^4 = 0 \\
i = 4 & b^4 - 5aabb + 5a^4 = 0 \\
i = 5 & b^6 - 6aab^4 + 9a^4b^2 - 2a^6 = 0 \\
i = 6 & b^6 - 7aab^4 + 14a^4b^2 - 7a^6 = 0 \\
i = 7 & b^8 - 8aab^4 + 20a^4b^4 - 16a^6bb + 2a^8 = 0 \\
i = 8 & b^8 - 9aab^4 + 27a^4b^4 - 30a^6bb + 9a^8 = 0 \\
 & \quad\text{etc.}
\end{array}
$$

Hier müssen also wiederum zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem ob i eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Wenn$i = 2\lambda - 1$ und $n = 4\lambda - 2$ ist, wird die Gleichung sein:

$$0 = b^{2\lambda} - 2\lambda aab^{2\lambda-2} + \frac{2\lambda(2\lambda-3)}{1\cdot 2}a^4b^{2\lambda-4} - \frac{2\lambda(2\lambda-4)(2\lambda-5)}{1\cdot 2\cdot 3}a^6b^{2\lambda-6}$$
$$+\frac{2\lambda(2\lambda-5)(2\lambda-6)(2\lambda-7)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^8b^{2\lambda-8} - \text{etc}$$

und in umgekehrter Reihenfolge wird sie sich so verhalten:

$$0 = a^{2\lambda} - \frac{\lambda\lambda}{1\cdot 2}a^{2\lambda-2}b^2 + \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{2\lambda-4}b^4 - \frac{\lambda\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + a^{2\lambda-6}b^6 + \text{etc.}$$

Wenn aber $i = 2\lambda$ und $m = 4\lambda$ ist, wird die Gleichung sein:

$$0 = b^{2\lambda} - (2\lambda+1)aab^{2\lambda-2} + \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-2)}{1\cdot 2}a^4b^{2\lambda-4} - \frac{(2\lambda+1)(2\lambda-3)(2\lambda-4)}{1\cdot 2\cdot 3}a^6b^{2\lambda-6}$$
$$+\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-4)(2\lambda-5)(2\lambda-6)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^8b^{2\lambda-8} - \text{etc.},$$

welche sich in umgekehrter Reihenfolge so verhalten wird:

$$0 = (2\lambda+1)a^{2\lambda} - \frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{2\lambda-2}b^2 + \frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{2\lambda-4}b^4$$
$$-\frac{(2\lambda+1)\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda+3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}a^{2\lambda-6}b^6 + \text{etc.}$$

oder nach Teilen durch $2\lambda + 1$ auf diese Weise:

$$0 = a^{2\lambda} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{2\cdot 3}a^{2\lambda-2}b^2 + \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}a^{2\lambda-4}b^4 - \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda+3)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}a^{2\lambda-6}b^6$$
$$+\frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda\lambda-4)(\lambda\lambda-9)(\lambda+4)}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}a^{2\lambda-8}b^8 - \text{etc.}$$

Nun wollen wir also zum anderen Fall voranschreiten.

Für den Fall $n = 2i + 1$

Für	wird die Gleichung sein
$i = 0$	$b - a = 0$
$i = 1$	$b^3 - abb - aab = 0$
$i = 2$	$b^5 - ab^4 - 2aab^3 + a^3bb = 0$
$i = 3$	$b^7 - ab^6 - 3aab^5 + 2a^3b^4 + a^4b^3 = 0$
$i = 4$	$b^9 - ab^8 - 4aab^7 + 3a^3b^6 + 3a^4b^5 - a^5b^4 = 0$
$i = 5$	$b^{11} - ab^{10} - 5aab^9 + 4a^3b^8 + 6a^4b^7 - 3a^5b^6 - a^6b^5 = 0,$

welche auf diese einfacheren Formen zurückgeführt werden:

Für	wird die Gleichung sein
$i = 0$	$b - a = 0$
$i = 1$	$bb - ab - aa = 0$
$i = 2$	$b^3 - abb - 2aab + a^3 = 0$
$i = 3$	$b^4 - ab^3 - 3aabb + 2a^3b + a^4 = 0$
$i = 4$	$b^5 - ab^4 - 4aab^3 + 3a^3bb + 3a^4b - a^5 = 0$
$i = 5$	$b^6 - ab^5 - 5aab^4 + 4a^3b^3 + 6a^4b^2 - 3a^5b - a^6 = 0,$

woher im Allgemeinen gefolgert wird, dass gelten wird:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} +b^{i+1} - ia^2b^{i-1} + \dfrac{(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2}a^4b^{i-3} - \dfrac{(i-2)(i-3)(i-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^6b^{i-5} + \text{etc.} \\ -ab^i + (i-1)a^3b^{i-2} - \dfrac{(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2}a^5b^{i-4} + \dfrac{(i-3)(i-4)(i-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^7b^{i-6} - \text{etc.} \end{array} \right\}$$

Umgekehrt sollten aber zwei Fälle betrachtet werden:

I. Wenn $i = 2(\lambda - 1)$ und $n = 4\lambda - 3$ ist, wird sein:

$$0 = a^{2\lambda-1} - \frac{\lambda}{1}a^{2\lambda-2}b^2 - \frac{\lambda(\lambda-1)}{1 \cdot 2}a^{2\lambda-3}b^2 + \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{2\lambda-4}b^3$$

$$+\frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{2\lambda-5}b^4 - \text{etc.}$$

II. Wenn $i = 2\lambda - 1$ und $n = 4\lambda - 1$ ist, wird sein:

$$0 = a^{2\lambda} + \frac{\lambda}{1}a^{2\lambda-1}b - \frac{\lambda(\lambda+1)}{1\cdot 2}a^{2\lambda-2}b^2 - \frac{\lambda(\lambda\lambda-1)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{2\lambda-3}b^3$$
$$+\frac{\lambda(\lambda\lambda-1)(\lambda+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{2\lambda-4}b^4 + \text{etc.}$$

und so haben wir für alle Fälle, in denen n eine ganze Zahl ist, Gleichungen zwischen den Seiten a und b gefunden.